

Vorlesung: Bildgebende Verfahren in der Medizin I

Leiter: Prof. Dr. rer. nat. Olaf Dössel 2. Prüfer: Axel Loewe, M.Sc.

Klausur

24. Februar 2016
Beginn: 10:30 Uhr

Familienname:	AUFKLEBER
Vorname:	
Matrikel-Nr.:	

Angaben zur Klausur:

Die Arbeitszeit beträgt 2 Stunden; Hilfsmittel sind nicht erlaubt, außer einem Taschenrechner.

Der Lösungsweg muss vollständig angegeben und nachvollziehbar sein. Dokumentieren Sie Ihre Überlegungen, geben Sie erläuternde Kommentare. Bei Formeln müssen die verwendeten Größen angegeben werden, bei Diagrammen müssen die Achsen beschriftet werden.

Verwenden Sie nur dokumentenechtes Schreibzeug!

Die maximal erreichbaren Punkte pro Aufgabe sind der Tabelle zu entnehmen.

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Gesamt
Punkte:	12	10	9	6	9	11	10	6	8	12	93
erreicht:											

Note:_____

Röntgen

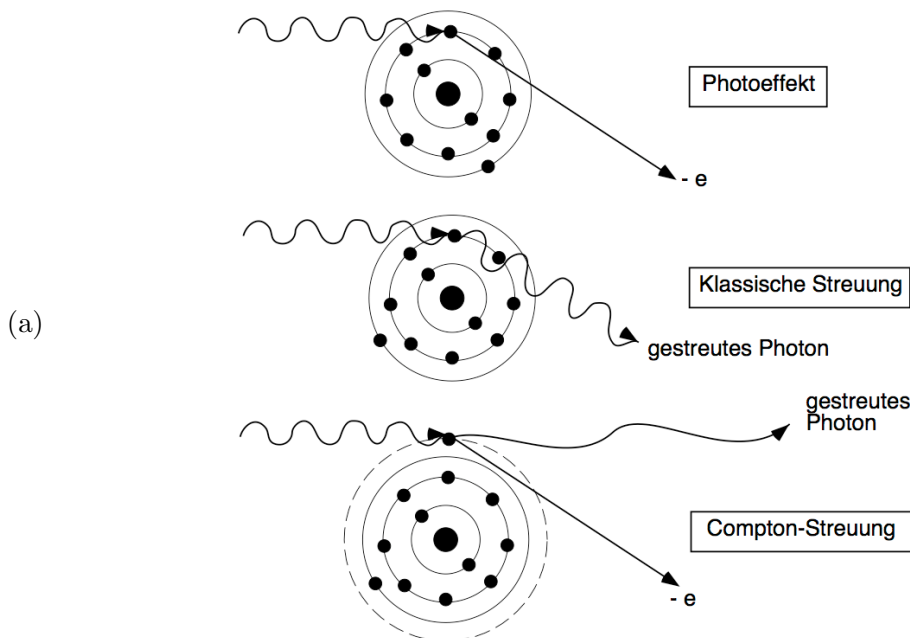
Frage 1

(12 Punkte)

Die Schwächung von Röntgenstrahlung im Körper wird von unterschiedlichen Wechselwirkungsprozessen verursacht.

- Welche drei Wechselwirkungsprozesse tragen im Energiebereich der diagnostischen Röntgenstrahlung zur Bildgebung bei? Nennen und skizzieren Sie diese Wechselwirkungen. (6 Punkte)
- Welcher Parameter beschreibt die Wahrscheinlichkeit der Wechselwirkung mit einem Atom? Wie ist der Parameter definiert? Geben Sie die Formel an und nennen Sie die Einheit dieses Parameters. (2 Punkte)
- Von welchen 4 Größen hängt die Schwächung von Röntgenstrahlen in Materie im Wesentlichen ab? Wie ändert sich die Schwächung mit der Zunahme der jeweiligen Größe? (4 Punkte)

Lösung:



- (b) Die Wahrscheinlichkeit der Wechselwirkung (WW) wird durch den Wirkungsquerschnitt beschrieben:

$$\sigma_{ww} = \frac{\mu_{ww}}{n_{ww}}$$

mit:

- σ_{ww} = Wirkungsquerschnitt der WW
- μ_{ww} = Schwächungskoeffizient der WW
- n_{ww} = Teilchendichte der Teilchen, mit denen die WW stattfindet

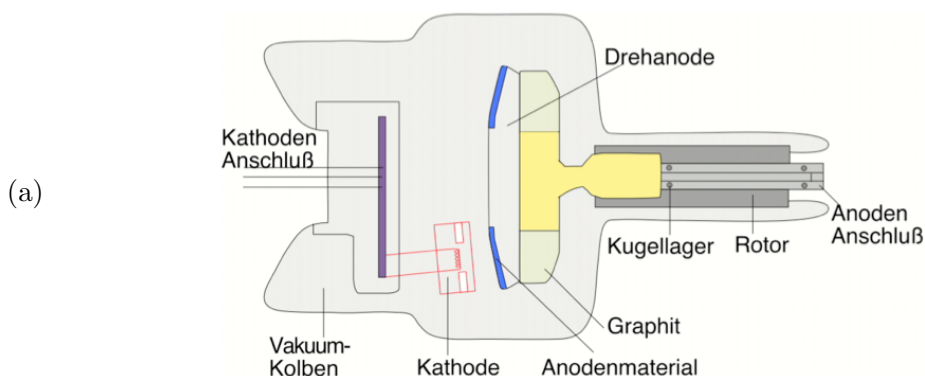
Der Wirkungsquerschnitt hat die Einheit einer Fläche, also m^2 oder cm^2 .

- (c)
- **Wellenlänge:** Schwächung steigt mit der Wellenlänge
 - **Ordnungszahl:** Schwächung steigt mit der Ordnungszahl des durchstrahlten Stoffs
 - **Dichte:** Schwächung steigt mit der Dichte des durchstrahlten Stoffs
 - **Dicke:** Schwächung steigt mit der Dicke des durchstrahlten Stoffs

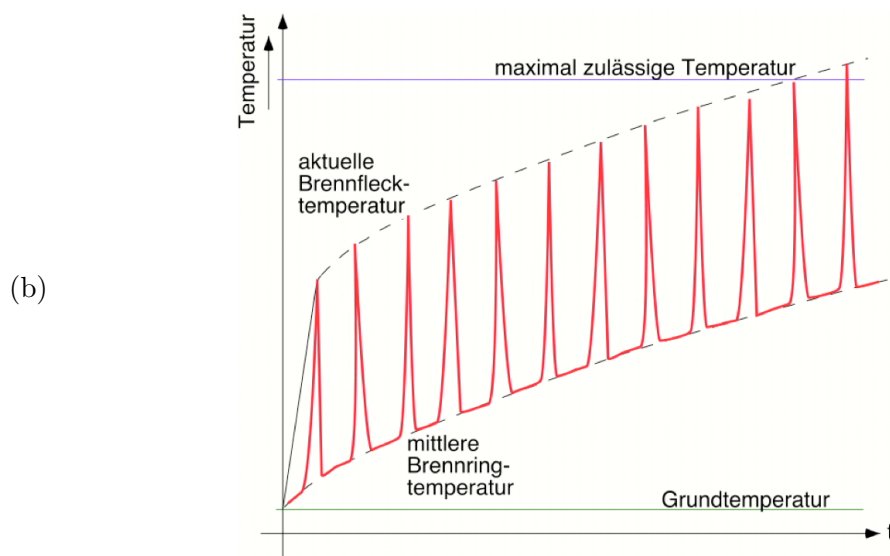
Frage 2**(10 Punkte)**

Bei der Erzeugung von Röntgenstrahlen wird der Großteil der Energie in Wärme umgewandelt, die schnell abgeführt werden muss damit das Anodenmaterial nicht schmilzt.

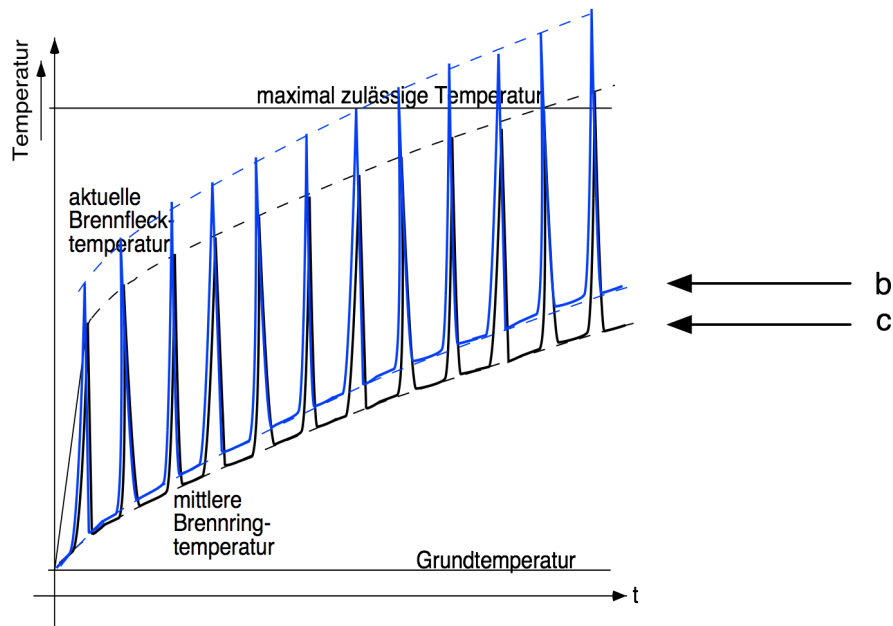
- (a) Wie wird dieses Problem üblicherweise gelöst? Skizzieren Sie eine derartige Röntgenröhre und beschriften Sie die Komponenten. Welche Materialien werden typischerweise verwendet und warum? (6 Punkte)
- (b) Wie sieht der Temperaturverlauf über der Zeit in einem Punkt der Anode qualitativ aus? Skizzieren Sie den Verlauf. (2 Punkte)
- (c) Wie verändert sich der Verlauf wenn der Sockel durch ein Material mit höherer spezifischer Wärme ersetzt wird? Skizzieren und erklären Sie die Veränderung. (2 Punkte)

Lösung:

Mit der Drehanode erreicht man, dass die eingebrachte Wärme sich auf einem ganzen Ring verteilt, ohne dass der Fokus dadurch größer wird. Als Anodenmaterial wird fast immer Wolfram verwendet, da es die Qualitätskriterien (hohe Ordnungszahl, hohe Schmelztemperatur, hohe Wärmeleitfähigkeit) am besten erfüllt. Die Schicht darunter besteht meist aus Molybdän, das zwar keine so hohe Ordnungszahl, dafür aber eine hohe Wärmeleitfähigkeit aufweist. Der Sockel der Drehanode besteht manchmal aus Graphit, das eine 10mal höhere Wärmekapazität hat als Wolfram.



- (c) Hier kann mehr Wärme gespeichert werden, so dass der Verlauf insgesamt unterhalb des Verlaufs aus b) bleibt.



Frage 3

(9 Punkte)

Folgende Abbildung zeigt die spektrale Leistungsdichte einer Anordnung bei 100 kW Eingangsleistung:

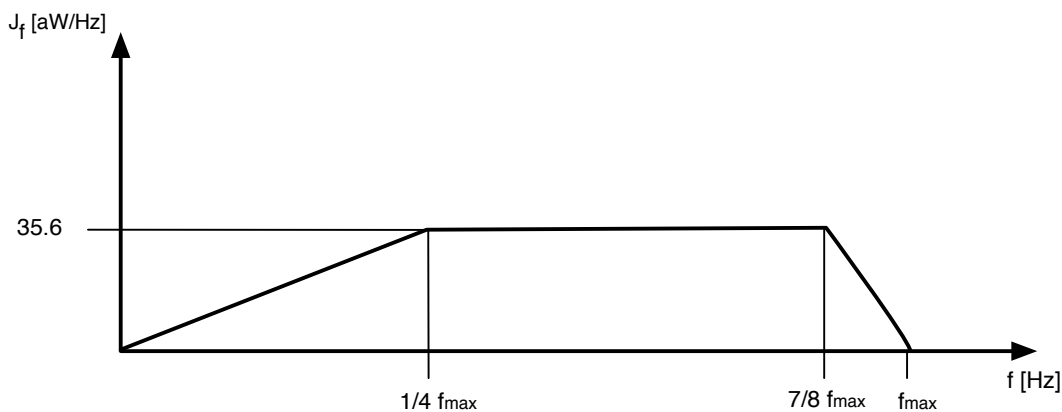


Abbildung 1: Spektrale Leistungsdichte einer Röntgenröhre bei 100 kW Eingangsleistung

Nehmen Sie an, dass es sich hierbei um eine Röntgenröhre handelt, die bei einer Anodenspannung von $U_A = 100 \text{ kV}$ und einem Anodenstrom von $I_A = 1 \text{ A}$ betrieben wird. Wie groß ist ihr Wirkungsgrad?

Hinweis: $h = 6.626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$, $e = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ und das kleine a in der Einheit aW in der Abbildung heißt Atto und entspricht 10^{-18} .

Lösung: Der Wirkungsgrad η ist definiert als:

$$\eta = \frac{J_{\text{ges}}}{I_A \cdot U_A} .$$

J_{ges} lässt sich mit:

$$J_{ges} = \int_0^{f_{max}} J_f df$$

ermitteln.

Benötigt wird also noch f_{max} . Aus:

$$E_{Photo} = h \cdot f \quad \text{und} \quad E_{Kin} = e \cdot U_A$$

kann

$$f_{max} = \frac{e \cdot U_A}{h} = 2,418 \cdot 10^{19} \text{ Hz}$$

berechnet werden.

Die Fläche unter der Kurve lässt sich auf Grund der einfachen Geometrie der Teilstücke berechnen:

$$J_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} f_{max} \cdot J_{f_{max}} = \frac{2}{16} f_{max} J_{f_{max}}$$

$$J_2 = \frac{5}{8} f_{max} \cdot J_{f_{max}} = \frac{10}{16} f_{max} J_{f_{max}}$$

$$J_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} f_{max} \cdot J_{f_{max}} = \frac{1}{16} f_{max} J_{f_{max}}$$

mit $J_{f_{max}} = 35,6 \cdot 10^{-18} \text{ W/Hz}$ erhält man:

$$J_{ges} = (J_1 + J_2 + J_3) = \frac{13}{16} \cdot 2,418 \cdot 10^{19} \text{ Hz} \cdot 35,6 \cdot 10^{-18} \text{ W/Hz} = 699,33 \text{ W}$$

und damit:

$$\eta = \frac{J_{ges}}{\text{Eingangsleistung}} = \frac{699,3 \text{ W}}{100 \text{ kW}} = 0,69933\%$$

Systemtheorie

Frage 4

(6 Punkte)

Abbildung 2 zeigt ein System zur Röntgenbildgebung. Das Übertragungsverhalten der Teilkomponenten wird durch die Modulation-Transfer-Funktionen MTF 1, MTF 2 und MTF 3 beschrieben.

- (a) Wie kann die Gesamtübertragungsfunktion MTF_{ges} des Systems berechnet werden? (1 Punkt)
- (b) In Abbildung 3 sind die Amplitudenverläufe zweier Testobjekte angegeben, die vom Röntgensystem aufgenommen werden. Zeichnen Sie die Amplitudenverläufe, die am Ausgang des Systems anliegen und geben Sie den Rechenweg für die relevanten Größen an. (5 Punkte)

Lösung:

- (a) Die Gesamtübertragungsfunktion ergibt sich aus dem Produkt der MTFs der Einzelkomponenten:

$$MTF_{ges} = MTF_1 \cdot MTF_2 \cdot MTF_3$$

- (b) Signal 1 hat eine Raumfrequenz $f_1 = 2 \text{ lp/mm}$, Signal 2 hat eine Raumfrequenz $f_2 = 1 \text{ lp/mm}$

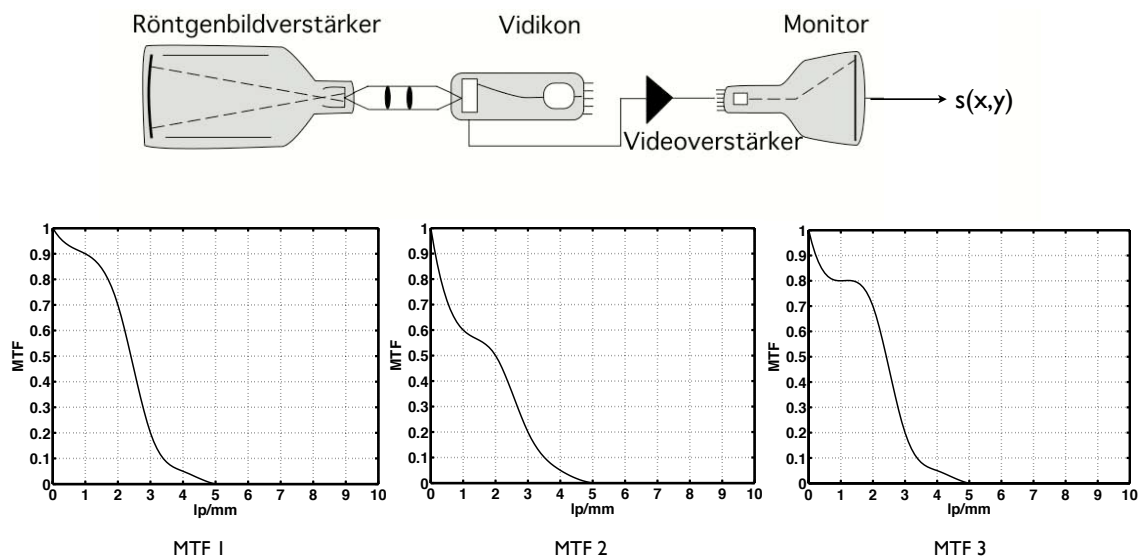
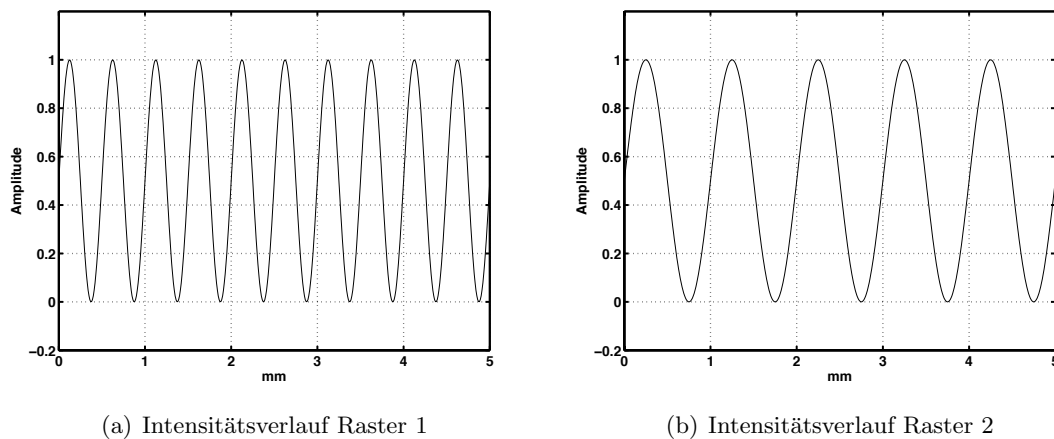


Abbildung 2



(a) Intensitätsverlauf Raster 1

(b) Intensitätsverlauf Raster 2

Abbildung 3

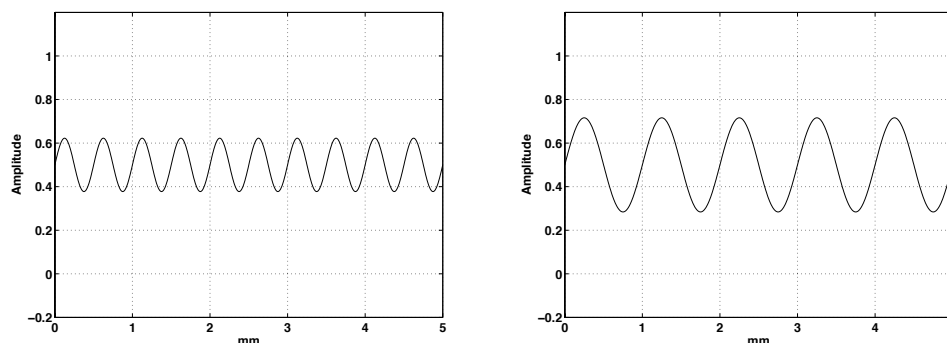
Für $MTF_{ges}(f_1)$ ergibt sich:

$$MTF_{ges}(f_1) = MTF_1(f_1) \cdot MTF_2(f_1) \cdot MTF_3(f_1) = 0,7 \cdot 0,5 \cdot 0,7 = 0,245$$

Für $MTF_{ges}(f_2)$ ergibt sich:

$$MTF_{ges}(f_2) = MTF_1(f_2) \cdot MTF_2(f_2) \cdot MTF_3(f_2) = 0,9 \cdot 0,6 \cdot 0,8 = 0,432$$

Folgende Abbildung zeigt die Signale am Ausgang:



Bildverarbeitung

Frage 5

(9 Punkte)

- (a) Geben Sie einen Faltungskern für einen 3x3 Sobelfilter in x-Richtung (S_x) an und nennen Sie eine Einsatzmöglichkeit dieses Filters. Warum kann dieser Faltungsfilter durch eine Systemübertragungsfunktion beschrieben werden? (3 Punkte)

- (b) Erläutern Sie die grundsätzliche Idee des Watershed-Algorithmus zur Segmentierung von Bilddaten. (3 Punkte)

Hinweis: Eine mathematische Formulierung ist in dieser Aufgabe nicht erforderlich.

- (c) Eine Möglichkeit der Bildverbesserung ist die Grauwerttransformation. In Abbildung 4 finden Sie das Originalbild und das dazugehörige Histogramm. Bei diesem Bild wurden verschiedene Punktoperatoren Ω angewendet, die eine Grauwerttransformation $g'(x, y) = \Omega(g(x, y))$ bewirken (Wertebereich: $[0, 255]$). Geometrisch kann Ω auch als Transformationskennlinie beschrieben werden. (3 Punkte)

Ordnen Sie die daraus resultierenden Histogramme (Abbildungen 5: 1,2,3) den entsprechenden Transformationskennlinien (Abbildungen 5: 4,5,6) zu, die den Grauwert g des Originalbildes auf den Grauwert g' abbildet ($g' = \Omega(g)$).

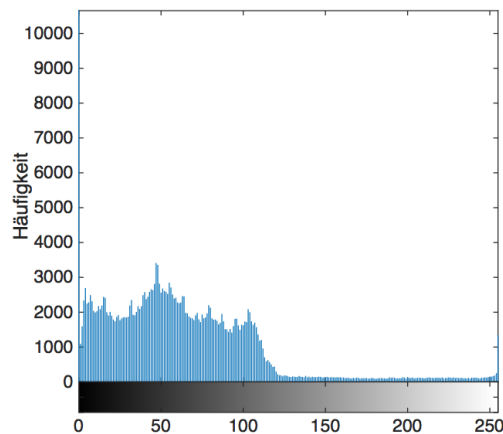
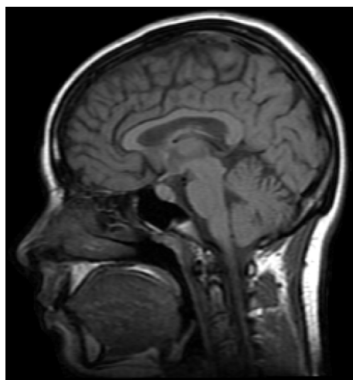


Abbildung 4: Originalbild (links) und Histogramm (rechts)

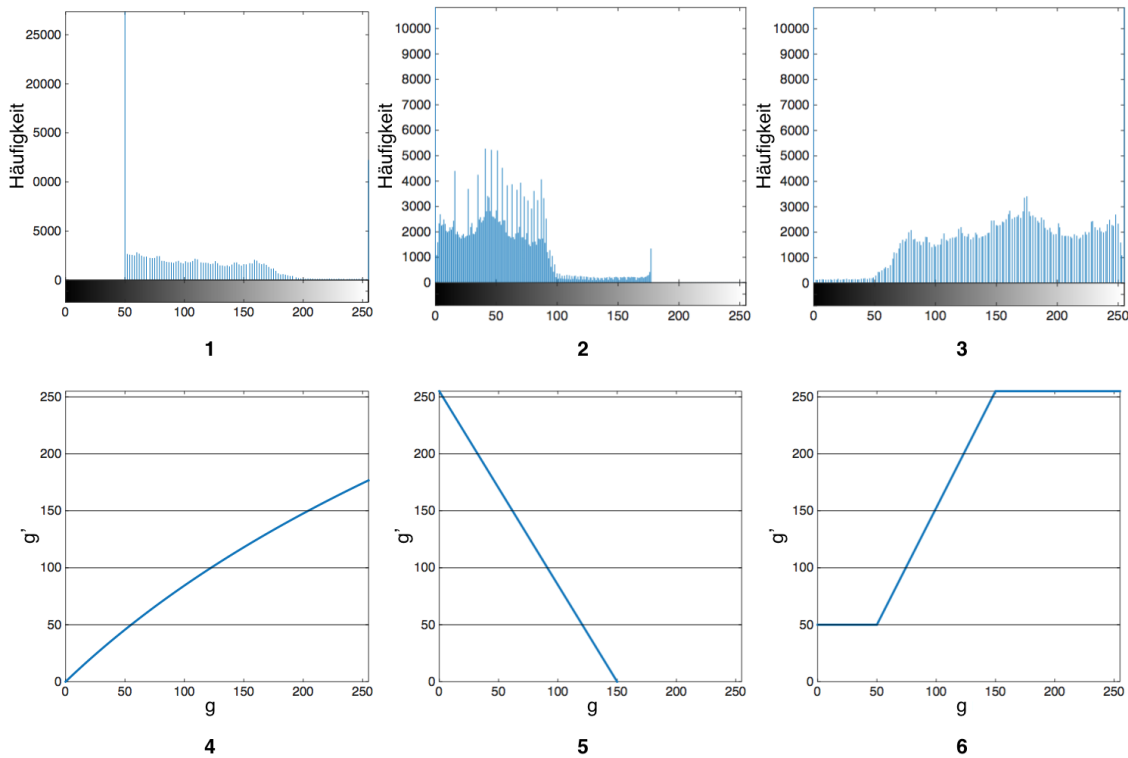


Abbildung 5: Histogramme (oben) und Transformationskennlinien (unten)

Lösung:

(a) Faltungskern für Sobelfilter:

$$S_x = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Der Faltungsfilter ist linear und verschiebungsinvariant.

(b) Die Grauwertstufen werden als ein Grauwertgebirge aufgefasst. In diesem Gebirge wird der Grundwasserpegel schrittweise erhöht. Erreicht das Wasser den tiefsten Punkt eines Tales, bekommt der entstehende See einen Namen. Steigt der Wasserspiegel weiter, bekommen alle Punkte, die zu einem See gehören, den Namen des tiefsten Punktes. An den Punkten, an denen Gebiete zusammenstoßen, werden Dämme gebaut, aus denen sich die Gebietsgrenzen ergeben.

- (c)
- $1 \rightarrow 6$
 - $2 \rightarrow 4$
 - $3 \rightarrow 5$

Computertomographie

Frage 6**(11 Punkte)**

- (a) Formulieren Sie das Fourier-Scheiben-Theorem am Beispiel einer Projektion zum Winkel $\Theta = 45^\circ$ (Erklärung und Skizze). (4 Punkte)

- (b) Wie lassen sich mit Hilfe des Fourier-Scheiben-Theorems Schnittbilder des Röntgen- (4 Punkte)
schwächungskoeffizienten rekonstruieren?
- (c) In Abbildung 6 ist das Originalbild (a), das rekonstruierte Bild nach ungefilterter (3 Punkte)
Projektion (b) sowie das rekonstruierte Bild nach gefilterter Projektion abgebildet.
Welche Artefakte treten bei der ungefilterten Rückprojektion auf und wodurch ent-
stehen diese Artefakte? Wie können die Artefakte kompensiert werden?

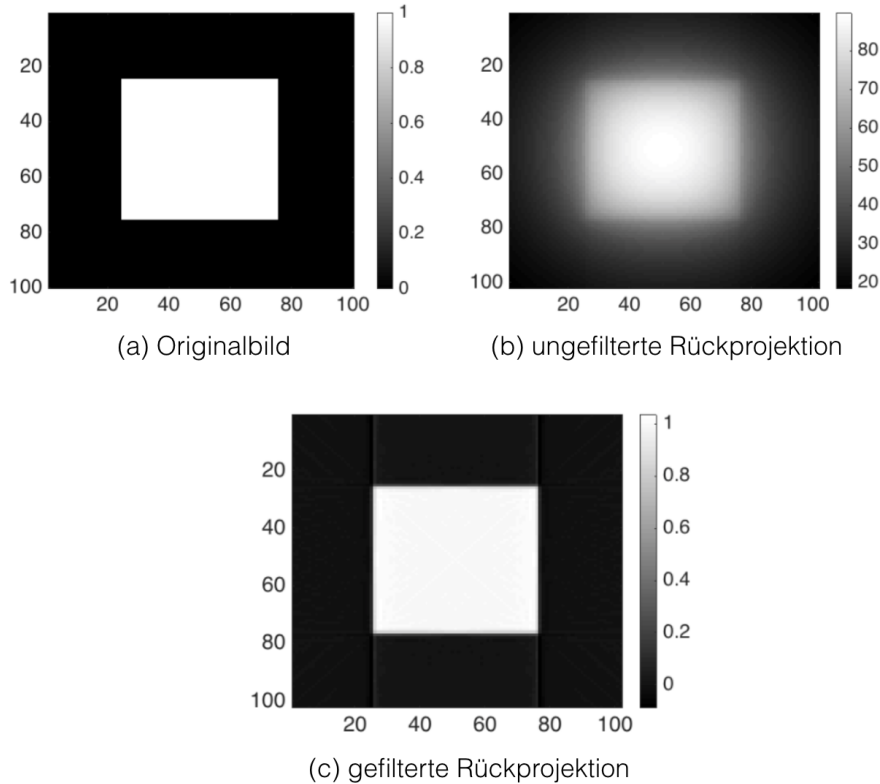
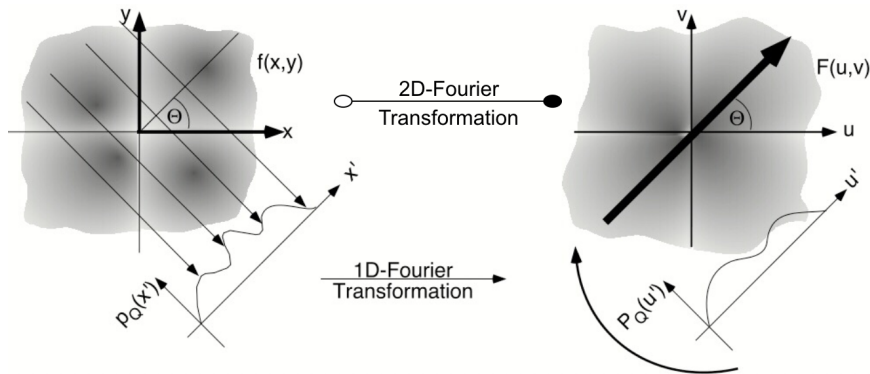


Abbildung 6: Bildrekonstruktion am Beispiel eines Quadrats

Lösung:

- (a) Sei $f(x, y)$ gegeben und $F(u, v)$ deren 2D-Fouriertransformierte. Sei $p_{\Theta}(s)$ eine Projektion von $f(x, y)$ bei $\Theta = 45^\circ$. Dann beschreibt die 1D-Fouriertransformierte von $p_{\Theta}(s)$, $P_{\Theta}(w)$, die Werte von $F(u, v)$ auf der ersten Winkelhalbierenden.



- (b) Es werden viele Projektionen $p_{\Theta}(s)$ unter verschiedenen Winkeln aufgenommen. Jede Projektion wird 1D-fouriertransformiert $P_{\Theta}(w)$. Die Ergebnisse werden auf Radialstrahlen zum Winkel Θ in die $F(u, v)$ -Ebene eingetragen. Hierbei muss auf

ein kartesisches Koordinatensystem interpoliert werden. Das Bild $f(x, y)$ erhält man aus der inversen Fouriertransformation von $F(u, v)$.

- (c) Tiefpassfilterung bei ungefilterter Rückprojektion, dadurch werden die Bilder verschmiert.

Ein Messwert der Projektion wird in den gesamten Radialstrahl eingeschrieben und kann nicht durch andere Projektionen kompensiert werden.

Die Filterkerne nach Ramachandran-Lakshminarayanan oder Shepp-Logan erzeugen negative Werte, die genau so groß sind, dass sie die zuviel eingetragenen Werte aus anderen Projektionen kompensieren.

Frage 7

(10 Punkte)

- (a) Erklären Sie kurz die wichtigsten Schritte der iterativen Rekonstruktion von CT-Aufnahmen. (4 Punkte)
- (b) In Abbildung 7 sind 4 CT-Projektionen eines 3x3 Bildes gegeben. Führen Sie den ersten Iterationsschritt für die iterative Rekonstruktion durch. (Hinweis: Ein Iterationsschritt beinhaltet die Berechnung für alle 4 Projektionen). Füllen sie hierzu die freien Felder im beigelegten Blatt aus und erweitern Sie das Schema falls nötig. (6 Punkte)

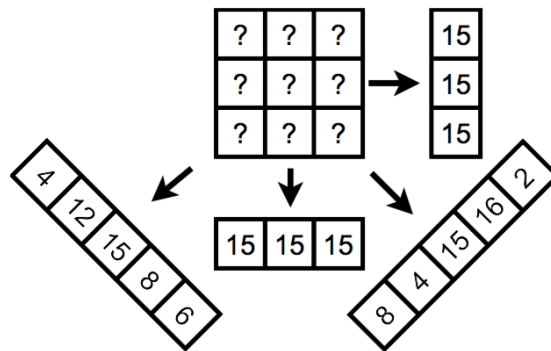
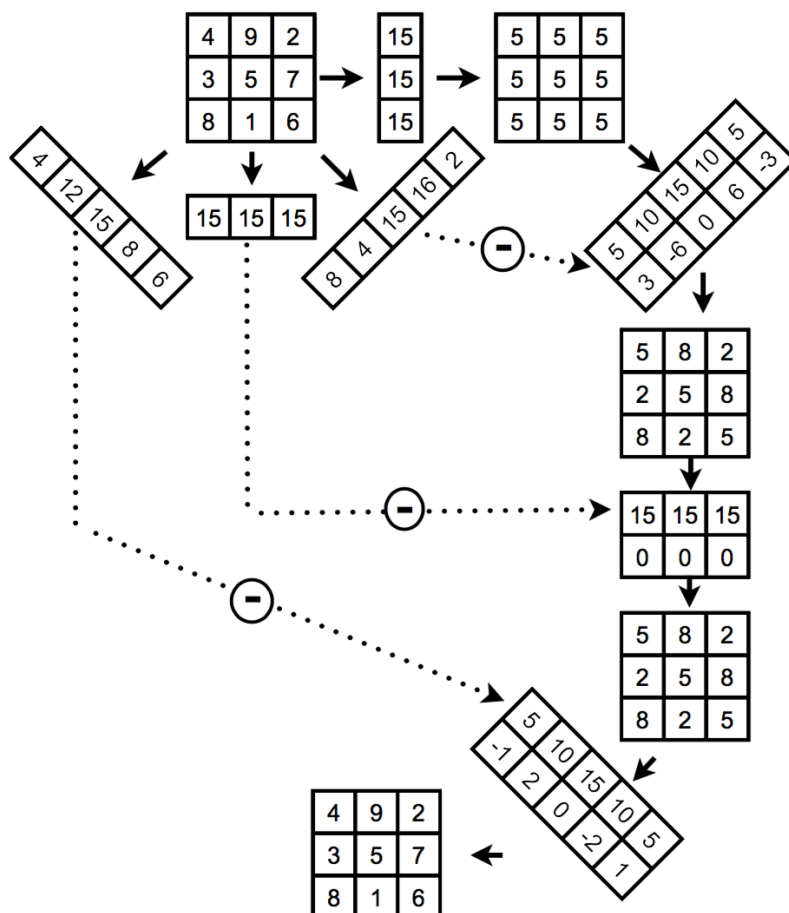


Abbildung 7: Schema für die iterative Rekonstruktion

Lösung:

- (a) Innerhalb eines Iterationsschritts werden nacheinander alle Projektionen mit dem geschätzten Bild abgeglichen. Bei der Verarbeitung der ersten Projektion wird der Messwert gleichmäßig auf alle Pixel, die zur Projektion beitragen, verteilt. Bei allen weiteren Projektionen wird die Projektion, die aus der aktuellen Schätzung berechnet wird, mit den realen Messwerten verglichen. Die Differenz zwischen den Projektionen wird zur Korrektur gleichmäßig auf die relevanten Pixel verteilt. Mit jedem weiteren Iterationsschritt konvergiert der Schätzwert gegen das reale Bild.
- (b) Siehe folgende Abbildung:



Strahlenwirkung

Frage 8

(6 Punkte)

Bestimmen Sie für den Fall $DQE = 1$ die minimale Energiedosis, die für eine Röntgenaufnahme mit 1% Kontrast ($\Delta N/N$) und 0,25 mm x 0,25 mm Pixelfläche nötig ist. Nehmen Sie für die Unterscheidbarkeit einen Wert $\kappa = 6$ an, die mittlere Quantenenergie beträgt 100 keV (siehe Abbildung 8).

Hinweis: Für eine Unterscheidbarkeit muss ΔN um einen Faktor κ größer sein, als die Varianz des Quantenrauschens.

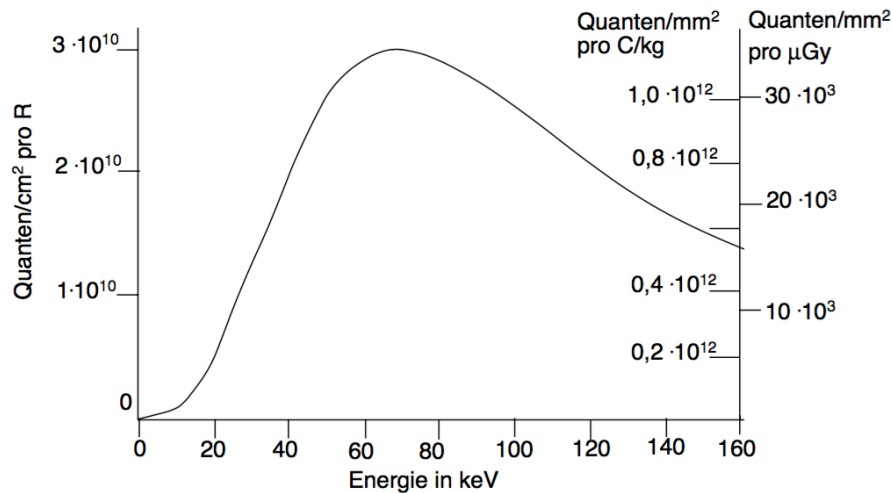


Abbildung 8: Umrechnungsfaktor Quantenzahl/mm² pro µG (Luftkerma) als Funktion der Quantenenergie

Lösung: Berechnung des Kontrasts:

$$K = \frac{\Delta N}{N}$$

mit:

- K : Kontrast
- ΔN : Differenz der Quantenzahlen in benachbarten Pixeln eines Bildes
- N : Mittlere Quantenzahl in benachbarten Pixeln

Für eine Unterscheidbarkeit muss ΔN um einen Faktor κ größer sein, als die Varianz des Quantenrauschens.

$$K_{min} = \frac{\kappa \cdot \sqrt{N}}{N}$$

N ergibt sich aus der Anzahl der Quanten pro Fläche n und der Fläche eines Pixels d^2 .

$$N = n \cdot d^2$$

mit:

- n : Anzahl der Quanten pro Fläche

- d : Kantenlänge eines Pixels

Es folgt:

$$K_{min} = \frac{\kappa}{\sqrt{n} \cdot d}$$

mit $K_{min} = 0,01$, $d = 0,25\text{mm}$ und $\kappa = 6$ (aus Aufgabenstellung). Somit ergibt sich die nötige Anzahl von Quanten pro mm^2 :

$$n = \frac{\kappa^2}{K_{min}^2 \cdot d^2} = \frac{36}{0,01^2 \cdot 0,25^2} = 5,76 \cdot 10^6 \text{ Quanten pro } \text{mm}^2$$

Aus der Abbildung ergibt sich für 100 keV: $30 \cdot 10^3 \frac{\text{Quanten}}{\text{mm}^2}$ entsprechen einer Dosis von $1 \mu\text{G}$.

Damit folgt für die Dosis:

$$D = \frac{5,76 \cdot 10^6}{30 \cdot 10^3} \mu\text{G} = 192 \mu\text{G}$$

Nuklearmedizinische Bildgebung

Frage 9

(8 Punkte)

Single Photon Emission Computed Tomography (SPECT)

- (a) Wie ist die Aktivität definiert und in welcher Einheit wird sie gemessen? (2 Punkte)
- (b) Wozu dient der Impulshöhenanalysator in einer Gamma-Kamera? (2 Punkte)
- (c) Wie funktioniert die vereinfachte Absorptionskorrektur bei der SPECT? (4 Punkte)

Lösung:

- (a) Zahl der Zerfälle pro Sekunde; Einheit: Becquerel, Bq
- (b) Gestreute Quanten kommen nicht vom Ort des Tracers. Sie haben meistens eine kleinere Energie als die primären Quanten. Mit einem energieaufgelösten Nachweis können gestreute Quanten unterdrückt werden.
- (c) Eine Messung anterior liefert das Signal S_A :

$$S_A = k \cdot A \cdot e^{-\mu x}$$

Eine Messung posterior liefert das Signal S_P :

$$S_P = k \cdot A \cdot e^{-\mu(D-x)}$$

Das geometrische Mittel S_{GM} aus S_A und S_P ist:

$$S_{GM} = \sqrt{S_A \cdot S_P} = k \cdot A \cdot e^{-\mu D/2}$$

Aus einer Transmissionsmessung ist $\mu \cdot D$ bekannt ($\ln \frac{I_0}{I} = \mu D$). So kann das Signal S_{GM} korrigiert werden.

Frage 10

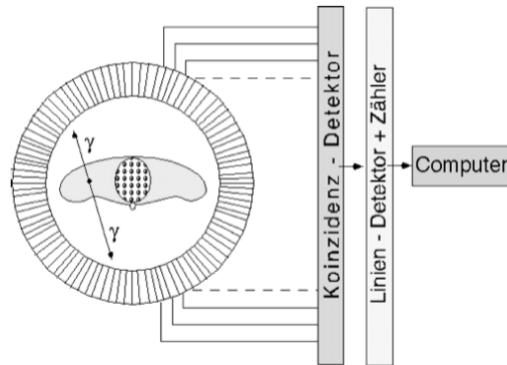
(12 Punkte)

Positronen-Emissions-Tomographie

- (a) Skizzieren Sie ein PET-System. (3 Punkte)
- (b) Welche zwei kernphysikalischen Prozesse spielen sich ab? (2 Punkte)
- (c) Welche Größe wird gemessen? Wie bestimmt man die Linie, auf der der Positronenstrahler gelegen haben muss? (3 Punkte)
- (d) Welches sind die wesentlichen Abbildungsfehler bei PET-Aufnahmen? (2 Punkte)
- (e) Was versteht man unter TOF-PET? Was kann man damit erreichen? (2 Punkte)

Lösung:

(a) PET-System:



- (b)
- Beta⁺-Emission: $p \rightarrow e^+ + n + \nu$
 - Proton $\rightarrow$ Positron + Neutron + Neutrino
 - Annihilation: $e^+ + e^- \rightarrow 2\gamma$
 - Positron + Elektron $\rightarrow$ 2 Gammaquanten
- (c) Gemessen wird die Häufigkeit, mit der auf Linien Ereignisse gezählt werden. Mit Hilfe eines Koinzidenz-Detektors wird die Linie bestimmt, auf der der Positronenstrahler gelegen haben muss. Die beiden Detektoren, die gleichzeitig ein Signal gemessen haben, werden durch eine Gerade verbunden.
- (d)
- Absorption
 - Nachweis gestreuter Quanten
 - zufällige Koinzidenzen
 - Linienintegrale von Ereignissen, die nicht durch das Zentrum gehen, werden immer breiter
- (e) TOF-PET ist die Abkürzung für Time-of-flight-PET. Diese Technik misst die zeitliche Differenz in der Detektion der beiden Annihilationsphotonen. Bei idealen Detektoren ließe sich somit der Ort der Annihilation eingrenzen. Diese Information kann bei der iterativen Rekonstruktion genutzt werden.